Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa Finală, Constanţa, 3 Aprilie 2012**

**CLASA a X-a**
**Soluţii şi bareme orientative**

**Problema 1.** Fie mulţimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \text{ Re } z \in \mathbb{Q}\}$. Demonstraţi că în planul complex există o infinitate de triunghiuri echila– terale care au toate afixele vârfurilor în mulţimea $M$.

**Soluţie.** Fie $z = a + bi$ un număr complex din $M$. Atunci $a \in \mathbb{Q}$ şi $a^2 + b^2 = 1$. Un triunghi echilateral cu afixele vârfurilor în mulţimea $M$, dintre care unul egal cu $z$, are celelalte două vârfuri în punctele de afixe

$$z(-1/2 \pm (i\sqrt{3})/2),$$

............................................................ **2 puncte**
numere având părţile reale egale cu $-a/2 \pm (b\sqrt{3})/2$. Cum $a \in \mathbb{Q}$, rezultă că $-a/2 \pm (b\sqrt{3})/2 \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.
............................................................ **1 punct**

Fie $q = b/\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Problema revine la a demonstra că există o infinitate de soluţii $(a, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ale ecuaţiei $a^2 + 3q^2 = 1$, i.e. ecuaţia $m^2 + 3n^2 = p^2$ admite o infinitate de soluţii $(m, n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
............................................................ **1 punct**

Cum $3n^2 = (p - m)(p + m)$, căutăm soluţii pentru care $p - m = 3$ şi $p + m = n^2$. Avem $n^2 = 2m + 3$, deci $n$ este impar.
............................................................ **1 punct**

Alegând $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*$, obţinem $m = 2k^2+2k-1$ şi $p = 2k^2+2k+2$. Atunci $a = (2k^2 + 2k - 1)/(2k^2 + 2k + 2)$, $b = ((2k + 1)\sqrt{3})/(2k^2 + 2k + 2)$, iar $z = a+bi$ are modulul 1 şi $a, b > 0$, deci triunghiul echilateral cu un vârf în $z$ este unic determinat. Cum $k \in \mathbb{N}^*$ este ales arbitrar, rezultă că există o infinitate de triunghiuri cu proprietatea cerută.
............................................................ **2 puncte**

**Problema 2.** Se consideră trei numere complexe $a$, $b$ şi $c$, astfel încât $a+b+c = 0$ şi $|a| = |b| = |c| = 1$. Demonstraţi că $3 \leq |z-a|+|z-b|+|z-c| \leq 4$, oricare ar fi numărul complex $z$, cu $|z| \leq 1$.

**Soluţie.** Considerăm punctele $A$, $B$, $C$ şi $M$ având afixele $a$, $b$, $c$ şi respectiv $z$. Atunci triunghiul $ABC$ este echilateral, înscris în cercul de rază 1 centrat în originea $O$ a planului complex.
............................................................ **1 punct**

Pentru inegalitatea din stânga, avem succesiv

$$\sum |z - a| = \sum |\overline{a}||z - a| = \sum |\overline{a}z - \overline{a}a| \geq$$
$$\geq |\sum \overline{(}az - 1)| = |z(\sum \overline{a}) - 3| = 3.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2 puncte**

Demonstrăm inegalitatea din dreapta. Considerăm o coardă care trece prin $M$ şi fie $P$, $Q$ punctele sale de intersecţie cu cercul circumscris triunghiului $ABC$. Fie $p$ şi $q$ afixele punctelor $P$ şi $Q$. Există $\alpha \in [0,1]$ astfel ca $m = \alpha p + (1-\alpha)q$. Prin urmare

$$\sum |z-a| = \sum |\alpha p + (1-\alpha)q - a| \leq \alpha \sum |p-a| + (1-\alpha) \sum |q-a|,$$

deci

$$\sum |z-a| \leq \max \left\{ \sum |p-a|, \sum |q-a| \right\}.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2 puncte**

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $\max\{\sum |p-a|, \sum |q-a|\} = \sum |p-a|$ şi că $P$ este poziţionat pe cerc între $A$ şi $C$. Din identitatea lui Ptolemeu obţinem $PA + PC = PB$, adică $|p-a| + |p-c| = |p-b|$. Atunci $\sum |z-a| \leq \sum |p-a| = 2|p-b| \leq 4$, ceea ce trebuia demonstrat.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2 puncte**

**Notă.** Egalitatea din membrul stâng se realizează în cazul $z = 0$, iar pentru membrul drept dacă $z \in \{-a, -b, -c\}$.

**Problema 3.** Fie numerele reale $a$ şi $b$, cu $0 < a < b$. Demonstraţi:

a) $2\sqrt{ab} \leq \dfrac{x+y+z}{3} + \dfrac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq a + b$, pentru $x, y, z \in [a, b]$.

b) $\left\{ \dfrac{x+y+z}{3} + \dfrac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \,\middle|\, x, y, z \in [a,b] \right\} = \left[ 2\sqrt{ab}, a+b \right]$.

**Soluţie.** a) Aplicând inegalitatea mediilor obţinem

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \sqrt[3]{xyz} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2\sqrt{ab}.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1 punct**

Din inegalitatea mediilor avem

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq \frac{x+y+z}{3} + \frac{ab(1/x + 1/y + 1/z)}{3} = \frac{1}{3}(f(x) + f(y) + f(z)),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1 punct**

unde $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(t) = t + \frac{ab}{t}$. Avem

$$t(a + b - f(t)) = (b-t)(t-a) \geq 0, t \in [a, b],$$

de unde rezultă că $f(t) \leq a + b$, $t \in [a, b]$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1 punct**

Atunci $f(x) + f(y) + f(z) \leq 3(a+b)$, de unde rezultă $\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq a + b$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1 punct**

b) Conform punctului anterior, este suficient să demonstrăm că intervalul $[2\sqrt{ab}, a+b]$ este inclus în mulţimea din membrul stâng. Vom arăta că

$$[2\sqrt{ab}, a+b] \subset f([a,b]).$$

Pentru aceasta, fie $s \in [2\sqrt{ab}, a+b]$. Ecuaţia $f(t) = s$ este echivalentă cu $t^2 - st + ab = 0$. Deoarece $s \geq 2\sqrt{ab}$, discriminantul $s^2 - 4ab$ este pozitiv, deci ecuaţia admite soluţii reale,

.......................................................... **1 punct**

care aparţin intervalului $[a,b]$.

.......................................................... **1 punct**

Alegând $x = y = z = \frac{s \pm \sqrt{s^2-4ab}}{2}$ obţinem $\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} = s$, de unde rezultă cerinţa.

.......................................................... **1 punct**

**Problema 4.** Fie $n$ şi $m$ două numere naturale, $m \geq n \geq 2$. Determinaţi numărul funcţiilor injective $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ cu proprietatea că există şi este unic un număr $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ pentru care $f(i) > f(i+1)$.

**Soluţie.** Problema cere determinarea numărului de funcţii care sunt strict crescătoare pe mulţimile $\{1,2,\ldots,i-1,i\}$ şi pe $\{i+1,i+2,\ldots,n\}$, dar care nu sunt strict crescătoare pe mulţimea $\{1,2,\ldots,n\}$.

.......................................................... **1 punct**

Imaginea unei funcţii injective $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ este o mulţime cu exact $n$ elemente. Pentru o funçtie $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ cu proprietatea cerută notăm cu $A$ imaginea sa şi fie $g$ unica funcţie strict crescătoare de la $A$ la $\{1,2,\ldots,n\}$. Evident, $g$ este funcţie bijectivă.

Rezultă că $h = g \circ f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ este o funcţie bijectivă cu proprietatea din enunţ. Într-adevăr, fie $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ pentru care $f(1) < \cdots < f(i)$, $f(i) > f(i+1)$ şi $f(i+1) < \cdots < f(n)$. Cum $g$ este funcţie strict crescătoare, deducem că $g(f(1)) < \cdots < g(f(i))$, $g(f(i)) > g(f(i+1))$ şi $g(f(i+1)) < \cdots < g(f(n))$, adică $h(1) < \cdots < h(i)$, $h(i) > h(i+1)$ şi $h(i+1) < \cdots < h(n)$.

.......................................................... **1 punct**

Vom arăta că funcţiei $h$ îi corespunde unic o submulţime $M$ a mulţimii $\{0,1,2\ldots,n\}$, alta decât $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1,2\}$,..., $\{1,2,\ldots,n\}$.

Pentru fiecare $i \in \{0,1,2\ldots,n\}$, alegem o submulţime $M$ a mulţimii $\{1,2,\ldots,n\}$ având $i$ elemente. Funcţia $h$ este unic determinată de $n$–uplul $(h(1),h(2),\ldots,h(n))$, care se obţine ordonând crescător mai întâi elementele mulţimii $M$, iar apoi elementele mulţimii $\{1,2,\ldots,n\} \setminus M$.

.......................................................... **2 puncte**

Pentru ca $h$ să nu fie strict crescătoare pe $\{1,2,\ldots,n\}$, mulţimea $M$ cu card $M = i$ trebuie să fie diferită de $\{1,2,\ldots,i\}$.

.......................................................... **1 punct**

Deoarece sunt $2^n$ submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, iar $n + 1$ dintre acestea – anume $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1, 2\}, \ldots$, $\{1, 2, \ldots, n\}$ – nu convin, rezultă că sunt $2^n - n - 1$ funcţii bijective $h = g \circ f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea cerută.

.......................................................... **1 punct**

Cum imaginea $A \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ cu $n$ elemente poate fi aleasă în $C_m^n$ moduri, rezultă că sunt $C_m^n(2^n - n - 1)$ funcţii injective $f = g^{-1} \circ h : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ cu proprietatea din enunţ.

.......................................................... **1 punct**